

توان و ریشه

توان: اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

توان
پایه
 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

مانند:
$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^n$$

ضرب اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند:
$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 4^7 \times 4^3 = 4^{10}$$

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند:
$$a^m \times b^m = (ab)^m \quad 12^7 \times 3^7 = 36^7$$

تقسیم اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند:
$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \frac{9^5}{9^3} = 9^2$$

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند:
$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad 20^8 \div 4^8 = 5^8$$

نکته: اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند:
$$4^8 \times 2^3 = (2^2)^8 \times 2^3 = 2^{16} \times 2^3 = 2^{19}$$

$$9^2 \div 27 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3$$

تجزیه تجزیه

نکته: اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند:
$$2^6 + 2^6 = 2 \times 2^6 = 2^7 \quad 9^5 + 9^5 + 9^5 = 3 \times 9^5 = 3 \times (3^2)^5 = 3^{11}$$

تجزیه

توان منفی: برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

نکته: تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته: اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$$5^{-6} = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \quad 3^{-4} \times 3^2 \div 27 = 3^{-4} \times 3^2 \div 3^3 = 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\frac{20^{-6}}{5^2 \times 4^{-6}} = \frac{5^{-6}}{5^2} = 5^{-8} = \left(\frac{1}{5}\right)^8 \quad \frac{4^7 \times 3^{-6}}{3^3 \times 4^{-2}} = \frac{4^7 \times 4^2}{3^3 \times 3^6} = \frac{4^9}{3^9} = \left(\frac{4}{3}\right)^9$$

توان و ریشه

نکته: هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$3^2 + 5^0 - 2^{-2} = 9 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{40 - 1}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

نماد علمی: برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته: به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیحی است.

(الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

رقم ۸

$$341000000 = 341 \times 10^8$$

رقم ۴

$$14752/93 = 1475293 \times 10^{-4}$$

مانند:

(ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی): ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

رقم ۶

$$0.0000037 = 37 \times 10^{-6}$$

$$0.00678 = 678 \times 10^{-3}$$

مانند:

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$530000 \times 0.00027 = 53 \times 10^5 \times 27 \times 10^{-4} = 1431 \times 10^1 = 1431 \times 10^2$$

ریشه گیری: (الف) ریشه دوم اعداد: هر عدد دارای دو ریشه دوم است: (یکی مثبت و دیگری منفی)

(ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و -۴)

$$4^2 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \text{ و } -4$$

مانند:

نکته: اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

(ب) ریشه سوم اعداد: هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[3]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

$$3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3 \text{ و } (-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مانند:

مثال: حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{64 \times \frac{1}{9}} = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt[4]{-125} = 4 \times -5 = -20$$

$$\sqrt{64} \times \sqrt[3]{-64} = 8 \times -4 = -32$$

$$\sqrt[3]{0.001} \times \sqrt{\sqrt{16}} = 0.1 \times 2 = 0.2$$

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها : اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته : اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$2\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

$$8\sqrt{50} \div 4\sqrt{2} = 2\sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

$$9\sqrt[3]{54} \div 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

ساده کردن رادیکال ها : بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضریبی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

ریشه دوم

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2 \times 64} = 4\sqrt[3]{2}$$

ریشه سوم

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \times 27} = 3\sqrt[3]{3}$$

ریشه سوم

مانند :

جمع و تفریق رادیکال ها : اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$5\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$$

مانند :

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3 \times 25} - 3\sqrt{2 \times 36} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 18\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -16\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} + 3\sqrt{-54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 9} + 3\sqrt[3]{-2 \times 27} + \sqrt[3]{2 \times 8} - 2\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt{2} = -5\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{2}$$

گویا کردن مخرج کسره های رادیکالی : گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

مانند :

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7}$$

$3 - 1 = 2$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

$3 - 2 = 1$

مانند :