

عدد های حقیقی

اعداد گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته: اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

جمع و تفریق اعداد کسری: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان (ب.م.م) مخرج ها است.

مانند:

$$(12, 18) = 36 \Rightarrow (ب.م.م) \text{ مخرج ها } = \frac{-15 + 14}{36} = -\frac{1}{36}$$

$$\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{18}\right) = \frac{-15 + 14}{36} = -\frac{1}{36}$$

ضرب اعداد کسری: فقط در ضرب می توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود.

مانند:

$$\left(-\frac{5}{12}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{8}$$

تقسیم اعداد کسری: تقسیم به ضرب تبدیل می شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می شود)

مانند:

$$\left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{21}{5}\right) = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \div \left[\left(-\frac{1}{15}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)\right] = \left(+\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{-1+9}{15}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{15}{8}\right) = +\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

مقایسه کسرها: از دو روش می توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می کنیم.

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{8}{20}, \frac{15}{20}, \frac{10}{20}, \frac{14}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

$$(2, 4, 5, 10) = 20$$

ب) تبدیل به عدد اعشار: (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می دهیم).

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{2}{5} = 0.40, \frac{3}{4} = 0.75, \frac{1}{2} = 0.50, \frac{7}{10} = 0.70 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بی نهایت عدد گویا وجود دارد.

عدد های حقیقی

پیدا کردن کسری بین دو عدد کسری : چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است :

(۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

(۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد

بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

روش اول

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{20} \text{ و } \frac{16}{20} \Rightarrow \frac{45}{60} \text{ و } \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

روش دوم

تبدیل کسر به اعداد اعشاری :

(۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود آن کسر را مختوم نام دارد.

مانند :

$$\frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{و} \quad \frac{6}{5} = 1.2$$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ باشند آن کسر مختوم است.

مانند :

$$\frac{3}{20} \quad 20 = 2^2 \times 5 \quad \text{و} \quad \frac{5}{8} \quad 8 = 2^3$$

(۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می گویند.

مانند : (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است)

$$\frac{5}{11} = 0.4545\ldots = 0.\overline{45} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

مانند :

$$\frac{3}{77} \quad 77 = 7 \times 11 \quad \text{و} \quad \frac{6}{13}$$

(۳) عدد های اعشاری متناوب مرکب : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم های تکراری برسند به آن کسر متناوب مرکب می گویند.

مانند :

$$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots = 0.8\overline{3} \quad \text{و} \quad \frac{7}{22} = 0.31818\ldots = 0.3\overline{18}$$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشند آن کسر متناوب مرکب است.

مانند :

$$\frac{5}{14} \quad 14 = 2 \times 7 \quad \text{و} \quad \frac{2}{75} \quad 75 = 3 \times 5^2$$

عدد های حقیقی

اعداد گنگ یا اصم: اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن ها نا متناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

نکته: مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می دهند.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است. (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

نکته: عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. (عدد π تا ۱۰ رقم اعشار: $\pi \approx 3.1415926535$)

مثال: در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

۲ مربع کامل نیست $1 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $3/14 \notin \mathbb{Q}$ $\pi \in \mathbb{Q}$ 47 مربع کامل نیست $\sqrt{47} \in \mathbb{Q}$ 0.6 $\sqrt{0.36} \notin \mathbb{Q}$ $-2/5 \notin \mathbb{Q}$

نکته: بین دو عدد بی نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: بین هر دو عدد داده شده دو عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ $\sqrt{3} < \sqrt{3/1} < \sqrt{3/2} < \sqrt{4}$ ب) ۲ و ۳ $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$

مثال: عدد $3 - \sqrt{10}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

بین ۰ و -۱ قرار دارد $3 - \sqrt{9} < 3 - \sqrt{10} < 3 - \sqrt{16} \Rightarrow 0 < 3 - \sqrt{10} < -1$

مثال: اعداد $\sqrt{17}$ و $1 - \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

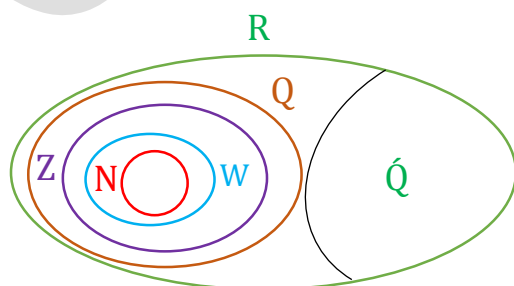


اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$

نکته: مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی $\mathbb{R}$ نشان می دهند.

نکته: نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) و اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) و اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) و اعداد گنگ ($\mathbb{Q}^c$)

و اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) به صورت زیر است:



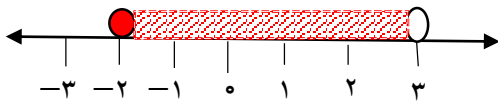
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^c \subseteq \mathbb{R}$

عدد های حقیقی

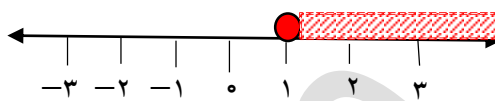
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره تو خالی قرار می دهیم)

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

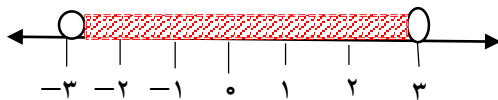
$$A = \{x \in R \mid -2 \leq x < 3\}$$



$$B = \{x \in R \mid 1 \leq x\}$$



مثال: مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.



$$C = \{x \in R \mid -3 < x < 3\}$$

قدر مطلق: فاصله ی نقطه نمایش یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدر مطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.

خواص قدر مطلق: الف) قدر مطلق عدد مثبت برابر است با خود آن عدد: $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

ب) قدر مطلق صفر برابر با صفر است: $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$

ج) قدر مطلق عدد منفی برابر با قرینه آن عدد است: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

مثال: عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$|4 - 6 \times 2^2 \div 3 + 2| = |-2| = 2 \quad |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2} \quad |a^{20} - a^{30}| = a^{30} - a^{20}$$

حاصل مثبت حاصل منفی

مثال: اگر $x = \frac{2}{3}$ و $y = 3$ و $z = -\frac{1}{4}$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|-6x - 4z| + 2|y| = \left| -6\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(-\frac{1}{4}\right) \right| + 2|3| = |-4 + 1| + 2(3) = 3 + 6 = 9$$

نکته: با توجه به مفهوم قدر مطلق همواره رابطه مقابل برقرار است: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$$

$$\sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2} = |3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

حاصل منفی حاصل مثبت